





Extensões do Single Index Model Para o Mercado Brasileiro de Ações

Bruno Lima - bruno.lima@cyrnel.com.br

Cyrnel International

- Experiência na área de tecnologia financeira
 - Desenvolvimento de software e processos
 - Gestão de dados
 - Pesquisa aplicada
 - Processo de Investimento
- Experiência da equipe em treinamento e suporte
 - +30 instituições no Brasil
 - +20 instituições no México
- Atuação nos seguintes centros financeiros:
 -  México
 -  Brasil

- **Desenvolvimento de software**
- **Gestão de Dados**
 - Aquisição
 - Processamento
 - Armazenagem
 - Data Marts
 - Data Warehouses
- **Pesquisa**
 - Desenvolvimento
 - Estimação
 - Teste e Validação
 - Implementação

Processos

Automação

Apresentação

- Introdução
- Single Index Model/Diagonal
- Exemplos
- Modelo de Múltiplos Fatores
- Conclusão

Introdução

- O Single Index Model proposto por Sharpe (1963), bem como suas extensões multi-fatoriais, assumem, em geral, que os retornos extra-fatores não são correlacionados;
- Mostraremos alguns exemplos que sugerem que tal aproximação é inadequada para o mercado brasileiro de ações.
- Dúvidas ou comentários podem ser encaminhadas para:
Bruno Lima, Cyrnel Research Group - bruno.lima@cyrnel.com.br
Ou
Enviar e-mail para: contato@cyrnel.com.br

Modelo de Índice Único

- Originalmente desenvolvido por Sharpe (1963), o modelo de um único fator assume a seguinte forma:

$$r_p = \beta_p r_f + \xi_p$$

onde:

- r_p – retorno em excesso de uma carteira;
- β_p – beta da carteira;
- r_f – retorno em excesso do fator;
- ξ_p – retorno residual.

- A expressão “retorno/risco residual”, ao longo de toda a apresentação, estará associada ao conceito de resíduo de um modelo, não possuindo qualquer relação com o termo “não-sistemático” derivado do CAPM.
- Características:
 - Separa retornos em excesso em suas componentes fatorial e residual;
 - Assume correlação ZERO entre o retorno fatorial e o retorno residual;
 - **Assume correlação ZERO entre os retornos residuais de diferentes títulos;**
 - Um único fator explica os co-movimentos entre ativos
- **ATENÇÃO: NÃO CONFUNDIR O SINGLE-INDEX MODEL COM O Capital Asset Pricing Model (CAPM) de Sharpe (1964)**

- A partir da formulação anterior, deriva-se a expressão para a variância total da carteira P como:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_f^2 + \omega_p^2$$

onde:

σ_p^2 – variância do retorno em excesso da carteira;
 β_p – beta da carteira em relação ao ‘mercado’;
 σ_f^2 – variância do retorno em excesso do ‘mercado’;
 ω_p^2 – variância de ξ_p .

- O foco dessa apresentação será a variância residual ω_p^2
- A expressão da variância da carteira, sob a forma matricial:

$$\sigma^2 = \underbrace{[w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4] \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \times [\sigma_M^2] \times [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4] \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}}_{w'(\beta/\beta')w} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4^2 \end{bmatrix} \times [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4]}_{w' \Omega w}$$

Aproximação Diagonal

- Apesar de, por hipótese, serem consideradas nulas as correlações entre retornos residuais, na prática, elas não o são;
- Evolução dos modelos de um único fator, são os modelos multi-fatoriais (MMF). Os MMFs procuram explicar uma porção maior dos co-movimentos entre os títulos, explorando a correlação residual observada nos modelos de um único fator;
- Pergunta: É razoável assumir que a correlação entre os retornos residuais de duas ações de uma mesma companhia é igual a zero?
- Nesse caso, mesmo com a utilização de modelos multi-fatoriais, a hipótese de covariâncias residuais nulas (matriz de covariância residual diagonal) não é adequada.

Estudo de Caso

Objetivo:

- Medir o impacto, nas estimativas de risco, da hipótese de se assumir correlações residuais nulas em um modelo de um único fator.

Para averiguar esses efeitos, estudamos as seguintes ações

- PETROBRÁS ON (Petrobrás / Petróleo)
- PETROBRÁS PN (Petrobrás / Petróleo)
- USIMINAS PNA (Usiminas / Mineração)
- ACESITA ON (Acesita / Siderurgia)
- SID NACIONAL ON (Sid Nacional / Siderurgia)

Estudo de Caso

Processo:

1. Cálculo da série de retorno dos títulos.
2. Cálculo da série de retornos do fator (índice):
 - ✓ Foi utilizado o IBOVESPA para representar o índice.
3. Cálculo dos BETAS de cada título em relação ao fator.
4. Cálculo do retorno em excesso de cada título:
 - ✓ Hipótese: CDI é a taxa livre de risco;
 - ✓ Retorno em Excesso = Retorno Total – CDI.
5. Cálculo dos Retornos Residual:
 - ✓ Ret. Residual = Ret.em Excesso – Beta x Ret. IBOV.
6. Cálculo das covariâncias entre as séries de retornos residuais.

Estudo de Caso PETR4 e USIM5

- Dados Utilizados:
 - Preços de Fechamento de 02/01/1996 até 06/06/2002

- Betas Históricos (60 meses)
 - PETR4: beta = 1.2
 - USIM5: beta = 0.9

Estudo de Caso – PETR4 e USIM5

Companhias: Petrobrás e Usiminas

Principal Característica:

- Empresas de Indústrias Diferentes

Resultados:

- Matriz de Covariância dos Retornos Residuais

0.10497	0.00430
0.00430	0.20736

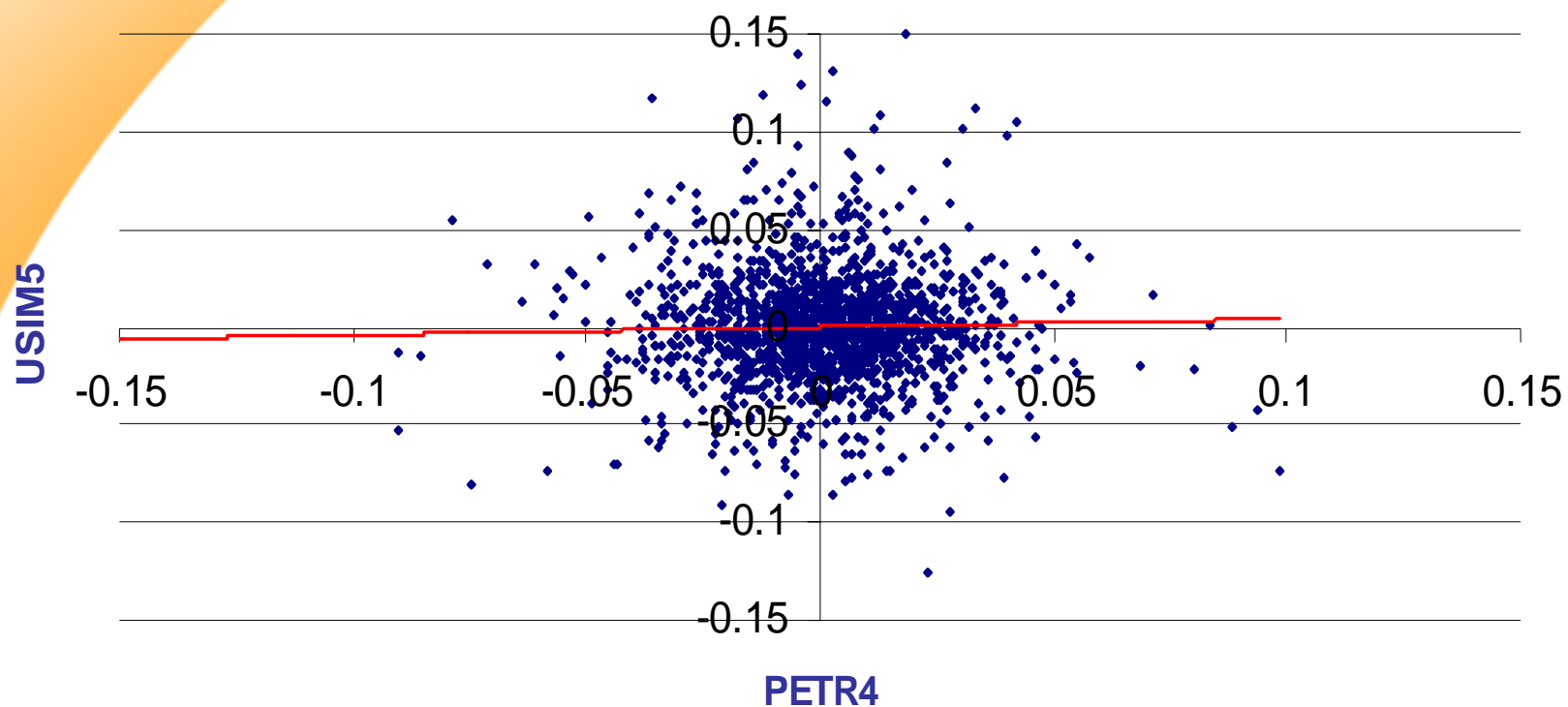
- Correlação dos Retornos Residuais = **0.03**

Comparação de resultados a partir da análise de uma carteira composta por essas duas ações:

Carteira com 50% em cada ação	$\rho = 0.03$	$\rho = 0$
Variância Residual	0.0802339	0.0780832
Risco Residual	28.33%	27.94%

Estudo de Caso - PETR4 e USIM5

Retorno Residual PETR4 x Retorno Residual USIM5



Estudo de Caso - PETR4 e USIM5

Conclusão:

- A correlação entre os retornos residuais das duas ações é próxima de zero.
- O modelo diagonal estaria fazendo uma boa aproximação para este par de ações

Estudo de Caso ACES3 e CSNA3

- Dados Utilizados:
 - Preços de Fechamento de 02/01/1996 até 06/06/2002

- Betas Históricos (60 meses)
 - ACES3: beta = 1.05
 - CSNA3: beta = 0.83

Estudo de Caso ACES3 e CSNA3

Companhias : Acesita e Sid Nacional

Principal Característica: Empresas de mesma Indústria

Resultados:

- Matriz de Covariância dos Retornos Residuais

0.56903	0.20696
0.20696	0.35729

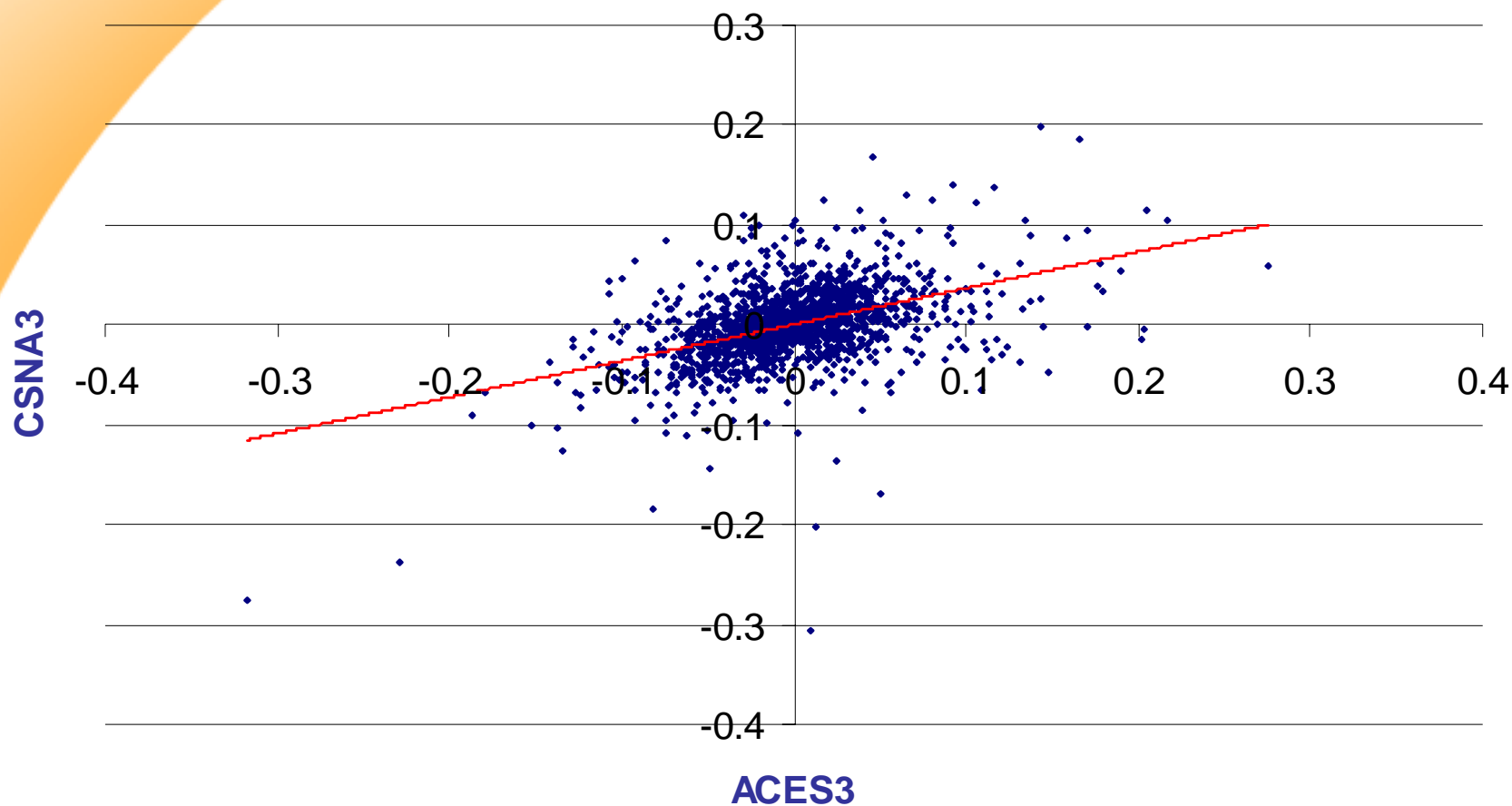
- Correlação entre os retornos residuais: 0.45
- Alta correlação entre os resíduos

Comparação de resultados a partir da análise de uma carteira composta por essas duas ações:

Carteira com 50% em cada ação	$\rho = 0.45$	$\rho = 0$
Variância Residual	0.335	0.231579481
Risco Residual	57.88%	48.12%

Estudo de Caso ACES3 e CSNA3

Retorno Residual ACES3 x Retorno Residual CSNA3



Estudo de Caso ACES3 e CSNA3

Conclusão:

- Empresas da mesma indústria também apresentam forte correlação entre os resíduos;
- Evidência de fatores comuns (mais adiante).

Estudo de Caso PETR3 e PETR4

Dados Utilizados:

- Preços de Fechamento de 02/01/1996 até 06/06/2002

Betas Históricos (60 meses):

- PETR4: beta = 1.1
- PETR3: beta = 1.2

Estudo de Caso PETR3 e PETR4

Companhia : Petrobrás

Principal Característica: Duas ações de mesmo emissor

Resultados:

- Matriz de Covariância dos Retornos Residuais

0.10497	0.07897
0.07897	0.15273

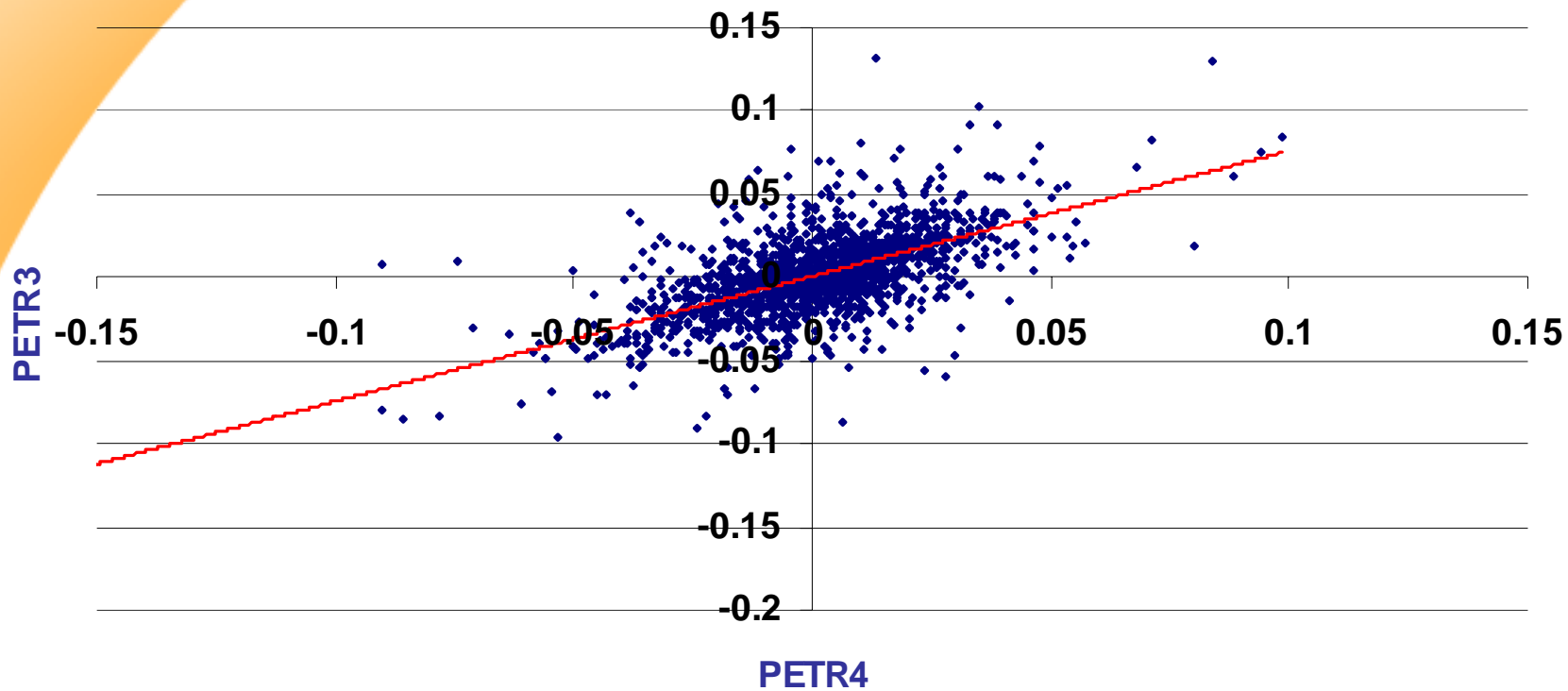
- Correlação entre os retornos residuais: **0.62**
- **Alta correlação entre os resíduos**

Comparação de resultados a partir da análise de uma carteira composta por essas duas ações:

Carteira com 50% em cada ação	$\rho = 0.62$	$\rho = 0$
Variância Residual	0.103911	0.064425
Risco Residual	32.24%	25.38%

Estudo de Caso PETR3 e PETR4

Retorno Residual PETR4 x Retorno Residual PETR3



Estudo de Caso PETR3 e PETR4

Conclusão:

- A correlação entre os retornos residuais é alta, nesse caso, por se tratar de títulos emitidos pela mesma instituição.

Solução do Problema

- A Cyrnel resolve o problema do Single-Index Model através de duas extensões
 - 1. Adicionando novos fatores ao modelo original
 - Indústrias
 - Exposição de cada ação às principais indústrias
 - Outras características que são fontes de risco e retorno
 - Tamanho da Empresa, Exposição Cambial, Liquidez etc.
 - 2. Relaxando a hipótese que a matriz de covariâncias entre os resíduos é diagonal.

Cyrnel - Modelo Multi Fatorial

- A Cyrnel utiliza um modelo multi-fatorial para explicar os movimentos das ações. Dentre os fatores, encontram-se as indústrias, que objetivam capturar os co-movimentos de empresas pertencentes a um mesmo setor e fatores de estilo, que objetivam capturar os co-movimentos de empresas com características similares (tamanho, liquidez..)
- Os retornos residuais são modelados de forma isolada, não assumindo independência entre eles.
- Modelos concebidos dessa forma são:
 - Mais adequados para o mercado brasileiro;
 - Aplicáveis ao mercado de renda-fixa.

Cyrnel - Modelo Multi-Fatorial

- Modelo Multi-Fatorial ...

$$r = \beta_1 * f_1 + \beta_2 * f_2 + \dots + \beta_n * f_n + r_{res}$$

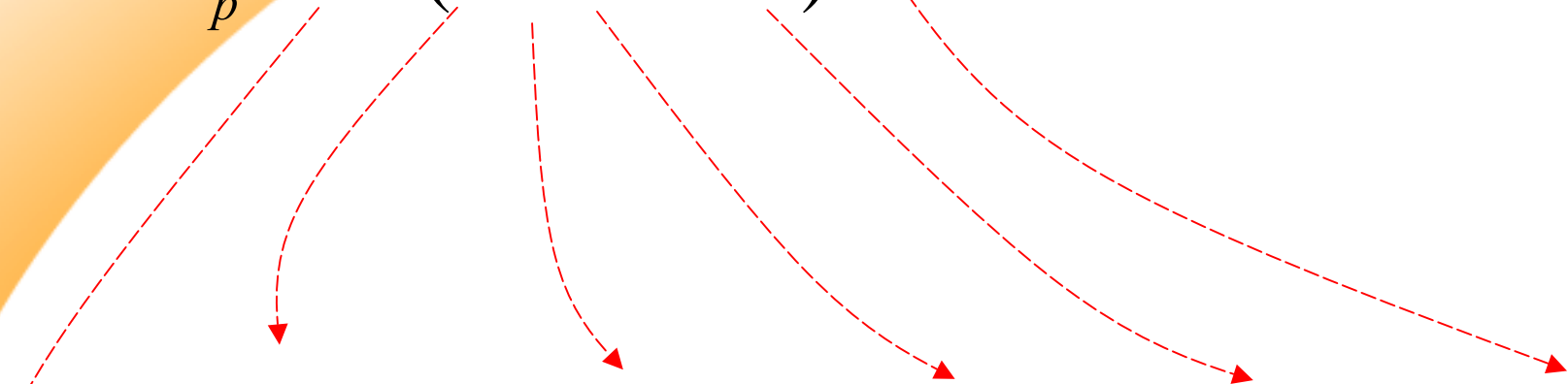
Retorno do Ativo Exposição ao fator n Retorno do Fator n

- Renda Variável
 - β s calculados a partir de dados fundamentalistas.
 - Retorno dos Fatores: Estimados diariamente por regressões “cross-sectional”
- Renda Fixa
 - β s estimados a partir da medida de sensibilidade dos instrumentos a choques nos fatores determinantes de seu preço
 - Retorno dos Fatores: Calculados diretamente a partir das séries de taxas e “preços” de fatores (estruturas a termo, índices ...)
- Risco

$$\text{Var}[r] = \beta_1^2 \text{Var}[f_1] + \beta_2^2 \text{Var}[f_2] + 2\beta_1\beta_2 \text{Cov}[f_1, f_2] + \dots + \sigma_{res}^2$$

MMF – Implementação da Cyrnel

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}'(\mathbf{XFX}' + \mathbf{\Omega})\mathbf{w}$$



$$\sigma^2 = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4] \times \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} \\ \beta_{4,1} & \beta_{4,2} & \beta_{4,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{2,1} & \sigma_{3,1} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_{2,2} & \sigma_{3,2} \\ \sigma_{1,3} & \sigma_{2,1} & \sigma_{3,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{2,1} & \beta_{3,1} & \beta_{4,1} \\ \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \beta_{3,2} & \beta_{4,2} \\ \beta_{1,3} & \beta_{2,3} & \beta_{3,3} & \beta_{4,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \omega_{1,3} & \omega_{1,4} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \omega_{2,4} \\ \omega_{3,1} & \omega_{3,2} & \omega_{3,3} & \omega_{3,4} \\ \omega_{4,1} & \omega_{4,2} & \omega_{4,3} & \omega_{4,4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

Maior número de fatores relevantes

Retornos residuais podem ser correlacionados

Vantagens e Conclusões

Vantagens/Conclusão:

- O risco residual, sendo parte importante do risco da carteira, não é totalmente diversificável, o que leva à necessidade de se mensurar correlações entre retornos residuais;
- O fato de, no Brasil, ações de uma mesma empresa estarem presentes em carteiras de investidores e mesmo em benchmarks, resulta em maior dificuldade de diversificação de risco residual.
- A alta correlação entre ações de um mesmo emissor constitui-se em mais um ponto que deve ser analisado na construção e avaliação de carteiras.

Referências

- Cyrnel International (2002). “Zeus Methodology”; Manual Interno
- Elton, E.J. e M. Gruber (1995). “Modern Portfolio Theory and Investment Analysis”. 5o ed. USA: Wiley.
- Grinold, R. e R. Kahn. (1999). “Active Portfolio Management”. 2o ed. Nova Iorque: McGraw-Hill.
- Rosenberg, B. (1977) Working Paper no 58 – “Security Appraisal and Unsystematic Risk” in Institutional Investment
- Sharpe, W. (1963). “A simplified model for portfolio analysis”; Management Science: 9:277-293
- _____ (1964). “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk.” Journal of Finance, vol. 19, nº 3
- _____ (1978). “Investment”. 1o ed. USA:Prentice – Hall.



www.cyrnel.com.br